Kombinatorik

Kombinatorik er en måde at beskrive forskellige muligheder for et bestemt tilfælde indtræder. Der er to forskellige grundprincipper

Additionsprincippet – når det er enten den ene eller den anden mulighed anvendes additionsprincippet dvs at sandsynlighederne for at det skulle opstå eller antallet af de mulige valg adderes som f.eks. et forskellige retter menuer 3 forretter 2 hovedretter og 2 deserter og hvis man kun har råd til én af slagsen (enten / eller) adderes mulighederne 3+2+2 =5 valgmuligheder

Multiplikationsprincippet – når det er både den ene og den anden mulighed som gør sig gældende
Multiplikationsprincippet fortæller i ovenstående eksempel hvor mange menu kombinationer man i alt kan opstille af 3 forretter 2 hovedretter og 2 deserter : 3*2*2= 12 forskellige menuer.

Tælletræ er en grafisk repræsentation af de mulige løsninger
Men tælletræer er ikke altid en praktisk løsning

Kombinatorikken
Ordnet – hvor det giver mening at holde styr på rækkefølgen af udvælgelsen
Uordnet – hvor rækkefølgen er underordnet

Med tilbagelægning - hvor det undersøgte objekt lægges tilbage efter hver undersøgelse således det kan optræde igen
Uden tilbagelægning - hvor udtagelsen af et element fjerner det fra efterfølgende udtrækningsmuligheder

ordnet med tilbagelægning: dvs at man tager en prøve lægger den tilbage og tager en ny osv dvs at man har antallet af emner (n) ganget sammen med sig selv det antal gange (r) man foretager udtrækningen = n^r

ordnet uden tilbagelægning: Dvs at man tager et element den første gang af mængden (n) og næste trækning tager et element af mængden (n-1) indtil man har foretaget r trækninger
$P(n,r) = n * (n-1) * (n-2) * \dots * (n-r+1)$ hvilket ikke ser særligt pænt ud   P=permutation

Derfor introduceres fakultet $n! = n * (n-1) * (n-2) * \dots * 3 * 2 * 1$

Vi forlænger det ovenstående med brøken $\frac{(n-r)*(n-r-1)*\dots*3*2*1}{(n-r)*(n-r-1)*\dots*3*2*1}$
Og får i stedet $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Uordnet uden tilbagelægning: det vi gerne vil have fat i er en kombination af r elementer i en n mængde hvilket kan forstås som x antal r – delmængder udtaget i n mængden
Da hver af disse delmængder kan beskrives som r! fås

$$r! * x = p(n,r) \leftrightarrow x = \frac{p(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r! * (n-r)!}$$

$$K(n,r) = \frac{n!}{r! * (n-r)!}$$

Binomialfordelingen b(n,p)

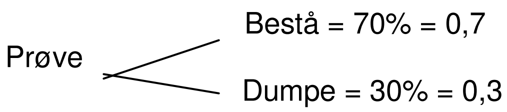
Hvis man har et eksperiment med kun to mulige udfald (enten sker det/ellers sker det ikke) har man en binomialfordeling. (bi - 2 muligheder, jvf. binære talsystem = totalssystemet)

Ifølge formelsamlingen gælder:

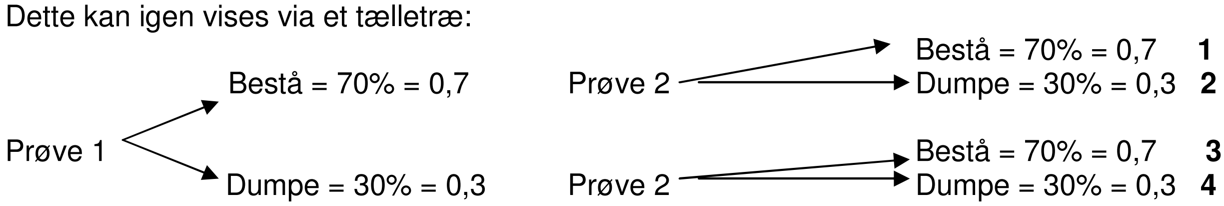
Punktsandsynligheden: $P(X = r) \;=\; K(n,r) * p^r * (1-p)^{n-r}$

Denne formel er det relativt enkelt at udlede! Man kan lettest gøre det ved at tage udgangspunkt i et konkret eksempel og se på et tælletræ. Via nogle eksempler kan man efterfølgende konkludere, hvad formlen betyder - og dermed hvorfor den gælder!

Vi ser på et konkret eksperiment. Vi antager, sandsynligheden/risikoen for at dumpe ved en køreprøve er 30% og dermed er der 70% sandsynlighed/chance for at bestå.
Hvis en person går til køreprøve, er der følgende muligheder:



Hvis to personer går til køreprøve, kan vi illustrere dette ved at sige, at vi først lader den ene gå til prøve (ligesom ovenfor) og dernæst den anden. Den anden der går op, har samme muligheder og sandsynligheder for at dumpe/bestå som den første. Hændelserne er uafhængige.
Dette kan igen vises via et tælletræ:



Vi kan se, der er fire muligheder, når to går til køreprøve. Der kan ske følgende:
Mulighed 1 : 1. består, 2. består dvs. 2 består
Mulighed 2: 1. består, 2. dumper dvs. 1 består
Mulighed 3: 1. dumper, 2. bestå r dvs. 1 består
Mulighed 4. 1. dumper, 2. dumper dvs. 0 består
De sandsynligheder, der er tale om ved de fire muligheder, kan bestemmes ved at gange sandsynlighederne på "grenene" sammen. Det betyder:

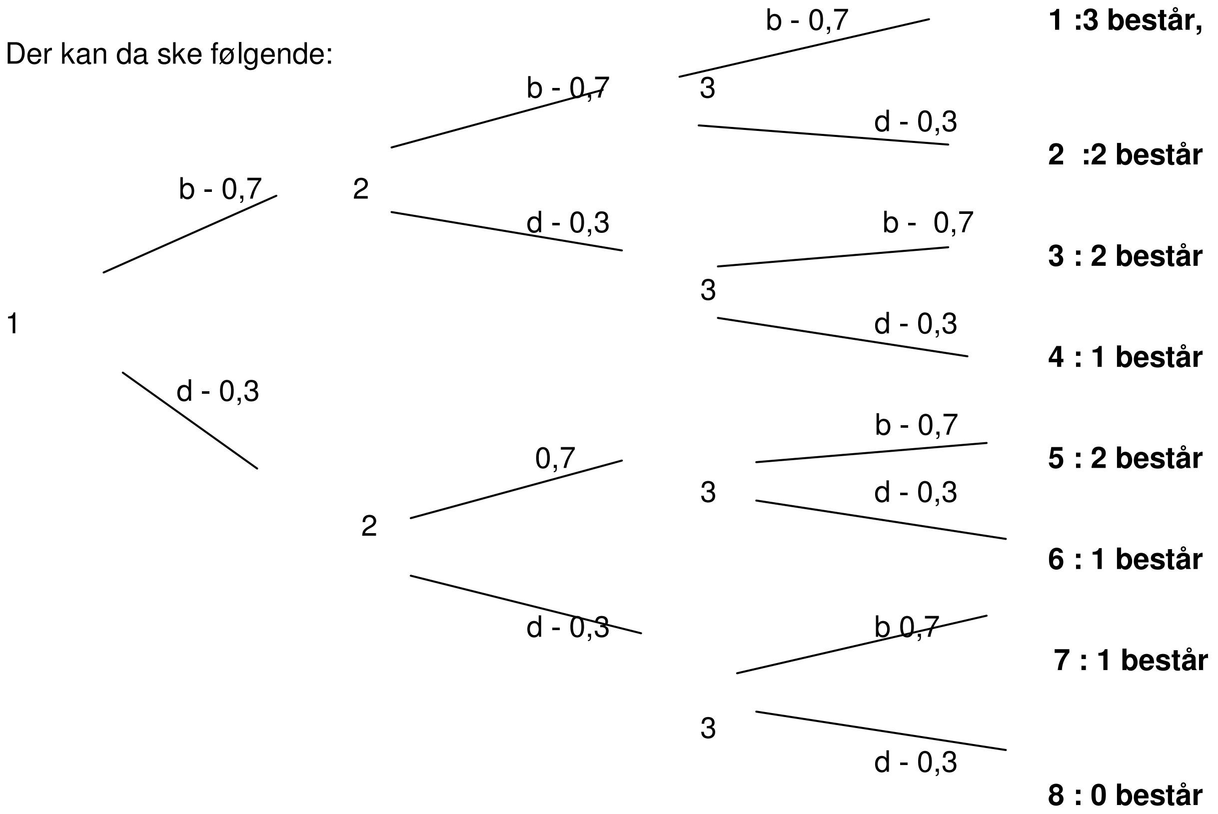
Mulighed 1 : 1. består, 2. består	dvs. 2 består	P(X1)= 0,7*0,7 = 0,49
Mulighed 2: 1. består, 2. dumper	dvs. 1 består	P(X2)= 0,7 *0,3 = 0,21
Mulighed 3: 1. dumper, 2. består	dvs. 1 består	P(X3)= 0,3 * 0,7 = 0,21
Mulighed 4. 1. dumper, 2.dumper	dvs. 0 består	P(X4)= 0,3 * 0,3 = 0,09

Summen giver 1!

Hvis vi er ligeglade med rækkefølgen svarer mulighed 2 og 3 til samme udfald, nemlig 1 består og 1 dumper.
Så hvis vi vil beregne sandsynligheden for at et bestemt antal består, kan vi konkludere:
P(X= 0) = 0,09
P(X = 1) = 0,21 + 0,21 = 0,42
P(X = 2) = 0,49

Vi fortsætter nu, idet vi antager, at tre går til køreprøve.

Der kan da ske følgende:



Præcis som før, kan man nu opstille de 8 muligheder og udregne sandsynlighederne ved at gange "grenene" sammen.
Nogle af grenene vil som før resultere i samme hændelse, når vi ser bort fra rækkefølgen, så hvis vi vil beregne sandsynlighederne, skal vi lægge flere sammen (f.eks. vil hændelsen: 2 består- være summen af mulighed 2,3 og 5 i eksemplet ovenfor)

Man kan spørge sig selv: hvor mange tal skal lægges sammen ved de forskellige muligheder?
Sandsynligheden for at 2 bestod, skulle beregnes ud fra tælletræet ved at lægge tre - ens - tal sammen. Hvordan kan man finde dette tal 3? Det kan man ved hjælp af kombinatorik!
Vi har en formel der siger:
Hvis du ud af en samling på n elementer skal vælge r ud, kan det gøres på K(n,r) måder.

Her er $K(n,r) = \frac{n!}{r!*(n-r)!}$

Det vil sige K(3,2) betyder: på hvor mange måder kan jeg ud af 3 vælge 2 ud.

Resultatet er: $\frac{3!}{2!*1!}$ = 3. Dette viste tælletræet også.

Tælletræet brugte vi også til at regne sandsynlighederne ud, idet vi skulle gange "grenene" sammen. Det viste sig, at hvis der skulle lægges flere muligheder sammen, så var det samme tal, man skulle lægge sammen.
Hvordan kan så det forklares?

I eksemplet med 2 af 3 der består, vil "grenene" bestå af 2 med sandsynligheden for at bestå (0,7) og en med sandsynligheden for at dumpe (0,3). Når man ganger sammen er rækkefølgen underordnet, idet 0,3 * 0,7 * 0, 7 = 0,7 * 0,7 * 0,3 = 0,7 * 0,3 * 0, 7

Nu er vi næsten fremme ved den kendte formel for binomialfordelinger!

Formlen siger

$$P(X = r) = K(n, r) * p^r * (1 - p)^{n-r}$$

I eksemplet med tre, der går til køreprøve, kunne vi udregne sandsynligheden for, at præcis 2 består ved at sige:

$3 *0,7^2*0,3 = 0,441$

3-tallet kunne vi finde : På hvor mange måder kan vi vælge 2 ud af 3? K(3,2)
0,7*0,7 kan vi finde ved at sige: sandsynligheden for at bestå er 0,7. 2 består, så 0,7*0,7= $0,7^2$
0, 3 kan vi finde ved at sige: 2 ud af 3 består. Altså må en dumpe. Sandsynligheden for at dumpe er 0,3

Altså fik vi: $P(X=2) = K(3,2) * 0,7^2 * (1-0,7)^{3-2} = 3 *0,7^2*0,3 = 0,441$

Generel udledelse af formlen:

Vi har: b(n,p) Altså en binomialfordeling med antalsparameteren n (vi ser på n tilfælde) og sandsynlighedsparameteren p (sandsynligheden for at en hændelse indtræffer er p)

Så gælder formlen: $(x = r) = K(n, r) * p^r * (1 - p)^{n-r}$

Her står:
Skal du finde ud af, hvad sandsynligheden for at den præcise hændelse p indtræffer (punktsandsynligheden), når der er givet en binomialfordeling, så:

K(n,r) -> Beregn hvor mange "grene", der giver det søgte resultat. Dvs. find ud af, på hvor mange måder, du kan udvælge r, når der er n elementer.
P^r -> Sandsynligheden for, at hændelsen indtræffer er p, og hvis den er indtruffet r gange, vil der stå sandsynligheden p på r antal grene. Altså skal p ganges med sig selv r gange, dvs. p^r.
$(1-p)^{n-r}$-> Hvis der er n forsøg, og hændelsen indtræffer r gange, må den ikke indtræffe resten af gangene. Dvs. (n-r) gange. Sandsynligheden for, at hændelsen ikke indtræffer beregnes ved at trække den kendte sandsynlighed p fra 1. På (n-r) "grene, vil der altså stå sandsynligheden (1-p). Når disse ganges sammen (n-r) gange, har vi $(1-p)^{n-r}$
Dermed er formlen udledt!